Chapitre 32

Théorie de l'intégration

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non singleton.
De plus, a, b sont deux réels tels que $a < b$.

1 Construction de l'intégrale

1.1 Subdivisions

Définition 32.1 (Subdivision d'un segment, pas)

Étant donné un segment $[a,b]$, on appelle subdivision (finie) de $[a,b]$ un ensemble de $n \in \mathbb{N}^*$ points de $[a,b]$ noté en général $\sigma := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

On appelle pas de la subdivision σ l'écart maximal entre deux points consécutifs. On le notera :

$$\delta(\sigma) := \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) > 0$$

Il arrive aussi qu'on note σ comme étant la *famille* (et non l'ensemble) des points $x_0, \cdots, x_n$, càd

$$\sigma = (x_0, \cdots, x_n) = (x_i)_{0 \le i \le n}$$

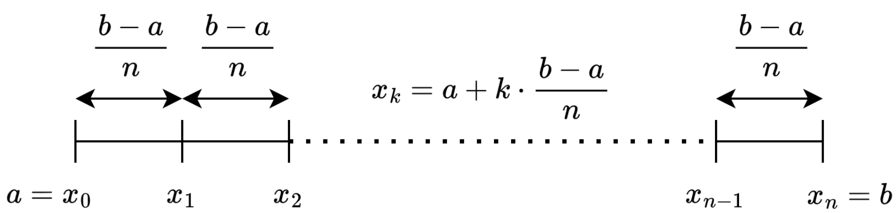
Dans ce contexte, on appelle <u>support</u> de σ l'ensemble des points $x_0, \cdots, x_n$, càd $\mathrm{Supp}(\sigma) := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Dans ce chapitre, on utilisera les deux écritures (σ vu comme un ensemble ou comme une famille) de manière interchangeable.

Comme son nom l'indique, une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \le i \le n}$ permet de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en une partition, constituée des singletons $\{x_i\}$ et des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$:

$$[a, b] \ = \ \{x_0\} \cup]x_0, x_1[\cup \{x_1\} \cup]x_1, x_2[\cup \ldots \cup \ \{x_{n-1}\} \cup]x_{n-1}, x_n[\cup \{x_n\}$$

Exemple 1. $\sigma = \left(k^2\right)_{0 \le k \le 3}$ est une subdivision de $[0, 9]$.

Exemple 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si on note $x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$, alors $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le n}$ est une subdivision de $[a, b]$ dite <u>subdivision régulière</u> :



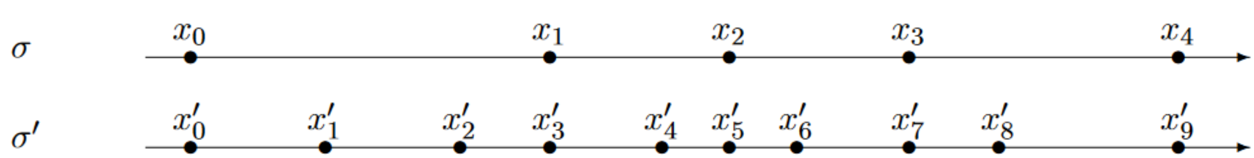
On remarque que $x_{k+1} - x_k =$ .... Autrement dit, tous les points de cette subdivisions sont équidistants ; l'intervalle $[a, b]$ a été découpé en n sous-intervalles $([x_k, x_{k+1}])_{0 \le k \le n-1}$ de même longueur. Le pas de cette subdivision est $\delta(\sigma) =$ .... En particulier, si $n = 1$, alors $\sigma =$ .... est une subdivision de $[a, b]$.

Définition 32.2 (Subdivision plus fine)

Soit σ, σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est <u>plus fine</u> que σ si $\sigma \subset \sigma'$.

σ' est plus fine que σ si on peut obtenir la subdivision σ' à partir de σ en rajoutant zéro, un ou plusieurs points.

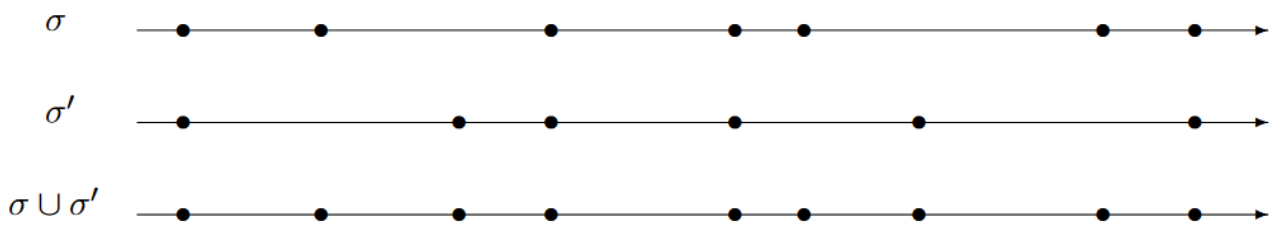
Exemple 3. Dans l'exemple ci-dessous, $\sigma' = \left\{x'_j \mid 0 \le j \le 9\right\}$ est plus fine que $\sigma = \{x_i \mid 0 \le i \le 4\}$. On constate que σ' est plus fine que σ, et en particulier que tout intervalle de la forme $[x'_j, x'_{j+1}]$ est inclus dans un intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$.



Propriété 32.3

Soit $\sigma = \{x_0, \cdots, x_n\}$ et $\sigma' = \{x'_0, \cdots, x'_N\}$ deux subdivisions de $[a, b]$. On note $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ la réunion des ensembles $\{x_0, \cdots, x_n\}$ et $\{x'_0, \cdots, x'_N\}$.
Alors σ'' est une subdivision de $[a, b]$ qui est plus fine que σ et que σ'.

Exemple 4. Dans l'exemple ci-dessous, on voit que $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ et σ' :



1.2 Fonctions en escaliers

Définition 32.4 (Fonction en escalier)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. On dit que f est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \qquad \exists y_i \in \mathbb{K} \qquad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[\qquad f(x) = y_i$$

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.
On note $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On n'impose aucune condition sur la valeur de f aux points x_i (excepté que f doit être définie en ces points).

Exemple 5. Toute fonction constante est en escalier sur tout intervalle $[a,b]$. La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a,b]$.

Exemple 6. Les fonctions suivantes sont en escalier.

Exemple 7. La fonction id : $x \mapsto x$ n'est pas une fonction en escalier (sur aucun intervalle $[a,b]$ avec $a < b$), de même que la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$:

$$1_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Propriété 32.5

Soit $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$ et σ_f une subdivision adaptée à f. Alors, si σ' est plus fine que σ_f, la subdivision σ' est également adaptée à f.

Voir le dessin ci-dessus pour une illustration.

Propriété 32.6

$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{[a,b]},+,\cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{K}^{[a,b]},+,\times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

En particulier, la somme, la différence, la multiplication par un scalaire et le produit de fonctions en escalier reste une fonction en escalier.

Démonstration. Soit f, g deux fonctions de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$. On note $\sigma_f = (x_i)_{0\le i\le n}$ et $\sigma_g = (x'_j)_{0\le j\le m}$ les subdivisions de $[a,b]$ associées à f et g. Ainsi, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ (resp. pour tout $j \in [\![0,m-1]\!]$), la fonction f est constante sur $]x_i,x_{i+1}[$ (resp. g est constante sur $]x'_j,x'_{j+1}[$).
On pose enfin la subdivision

$$\tau = \sigma_f \cup \sigma_g = (z_k)_{0\le k\le N}$$

qui est donc une subdivision plus fine que σ_f et σ_g. Par construction de τ, pour tout $k \in [\![0,N-1]\!]$, il existe i et j tels que l'intervalle $]z_k,z_{k+1}[$ est inclus dans $]x_i,x_{i+1}[$ et dans $]x'_j,x'_{j+1}[$. Ainsi, f et g sont constantes sur chaque intervalle $]z_k,z_{k+1}[$. Il en va donc de même pour $f+g$, pour fg, pour λf avec $\lambda \in \mathbb{K}$, ce qui prouve la première assertion.
Pour la seconde assertion, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, f est constante sur $]x_i,x_{i+1}[$: on note y_i cette valeur. On montre alors par disjonction de cas que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x)| \le \max(|y_0|,\cdots,|y_{n-1}|,|f(x_0)|,|f(x_1)|,\cdots,|f(x_n)|)$$

et donc f est bornée sur $[a,b]$. □

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 32.7 (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$. On pose $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision adaptée à f. Enfin, on note $y_i \in \mathbb{K}$ la valeur que prend f sur l'intervalle $]x_i,x_{i+1}[$. On définit l'intégrale de f par :

$$\int_{[a,b]} f := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)y_i \quad \in \mathbb{K}$$

La valeur $\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée σ que l'on choisit. Par ailleurs, l'intégrale de f ne dépend pas des valeurs de $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$. Enfin, on peut étendre cette définition à $a,b \in \mathbb{R}$ quelconques (sans qu'on ait nécessairement $a < b$).

Définition 32.8 (Intégrale $\int_a^b f$)

Soit $a,b \in \mathbb{R}$, sans supposer $a < b$.

- Si $a < b$ et que f est en escalier sur $[a,b]$ alors on pose $\int_a^b f := \int_{[a,b]} f$ (définition 32.7).
- Si $b < a$ et que f est en escalier sur $[b,a]$ alors, on pose $\int_a^b f := -\int_{[b,a]} f = -\int_a^b f$.
- Si $a = b$ (et que $a \in D_f$), alors (par convention) $\int_a^b f = \int_a^a f = 0$.

Notation non officielle : dans ce qui suit, on note $\rangle a,b\langle$ l'intervalle fermé borné ayant a et b pour bornes, càd :

- Si $a < b$ alors $\rangle a,b\langle = [a,b]$
- Si $b < a$ alors $\rangle a,b\langle = [b,a]$
- Si $a = b$ alors $\rangle a,b\langle = \{a\}$

On notera que par définition $\rangle a,b\langle = \rangle b,a\langle$.

Théorème 32.9 (Propriétés de l'intégrale (fonctions en escalier))

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ (sans supposer $a < b$). Soit f,g deux fonctions en escalier sur $\rangle a,b\langle$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors :

1. Linéarité : pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est en escalier sur $\rangle a,b\langle$ et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$
2. Chasles : soit $c \in \rangle a,b\langle$. Alors f est en escalier sur $\rangle a,c\langle$ et sur $\rangle c,b\langle$, et on a $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. Positivité : si $f \geq 0$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
4. Croissance : si $f \leq g$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
5. **Inégalité triangulaire (intégrale)** : la fonction $|f|$ est en escalier et, si on a $\boxed{a \leq b}$:
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Remarque. Pour la positivité et la croissance, il est sous-entendu que l'on doit avoir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour les appliquer : si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les assertions "$f \geq 0$" et "$f \leq g$" n'ont pas de sens.
Pour l'inégalité triangulaire, en l'absence d'hypothèse sur a et b, on peut écrire :

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f| \qquad \text{ou encore} \qquad \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$$

1.4 Fonctions continues par morceaux

Définition 32.10 (Fonction continue par morceaux)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est <u>continue par morceaux</u> s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que :

1. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f restreinte à $]x_i, x_{i+1}[$ (càd $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$) est continue.
2. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on peut prolonger $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Une telle subdivision σ est dite <u>adaptée</u> à f.
On note $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si elle n'admet qu'un nombre *fini* de points de discontinuité, et si f admet en tout point de discontinuité une limite à gauche (sauf en a) et une limite à droite (sauf en b) qui sont finies.

Exemple 8. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exemple 9. Les fonctions suivantes sont continues par morceaux.

Exemple 10. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$ car elle n'admet pas de limite finie à droite en 0.

Propriété 32.11

$\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{[a,b]},+,\cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{[a,b]},+,\times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

Démonstration. Étant donné f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ de subdivisions adaptées σ_f et σ_g, on montre par exemple que $f+g$ est continue par morceaux. En posant $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g := (x_i)_{0\leq i\leq N}$, on montre que σ est adaptée à f et à g : sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, f et g sont continues et prolongeables par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction continue, donc $f+g$ aussi. Idem pour λf et pour fg. $\square$

1.5 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Lemme 32.12 (Lemme d'approximation)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. La construction précise de g est hors-programme (mais on peut le voir sur un dessin) :

□

Théorème 32.13 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.

- Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour toute telle suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n$$

Cette limite ne dépend pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie.

Démonstration. Peut être sautée en première lecture. Cf section Compléments. □

On a donc défini la valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ pour une fonction continue par morceaux. Cette valeur présuppose d'avoir $a < b$. Comme pour les fonctions en escalier, on peut étendre la définition de cette intégrale lorsque $a, b \in \mathbb{R}$ sans supposer $a < b$:

$$\int_a^b f := \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle\int_{[b,a]} f & \text{si } b < a \end{cases}$$

1.6 Intégrale d'une fonction complexe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On rappelle qu'alors $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier, on peut donner un sens aux notions de continuité par morceaux et d'intégrale pour les fonctions $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Définition 32.14 (Intégrale si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont, et dans ce cas on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f := \int_a^b \mathrm{Re}\, f + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f \quad \in \mathbb{C}$$

On note $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Propriété 32.15

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) \;;\; \int_a^b \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right) \;;\; \overline{\int_a^b f} = \int_a^b \overline{f}$

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition ci-dessus. □

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Résultats liés à la construction

Dans ce qui suit, on utilise à nouveau la notation (non officielle !) $\rangle a,b\langle$ introduite juste avant le Théorème 32.9.

Théorème 32.16

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ (sans supposer $a < b$) et $f,g : \rangle a,b\langle \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux.

1. Linéarité : pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux sur $\rangle a,b\langle$ et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$
2. Chasles : soit $c \in \rangle a,b\langle$. Alors f est continue par morceaux sur $\rangle a,c\langle$ et $\rangle c,b\langle$ et
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
3. Positivité : si $f \geq 0$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
4. Croissance : si $f \leq g$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
5. **Inégalité triangulaire (intégrale)** : la fonction $|f|$ est continue par morceaux, et si $\boxed{a \leq b}$,
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Idée de la preuve. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, par le théorème 32.13, on dispose d'une suite (h_n) de fonctions en escalier qui tend vers f. Ces propriétés étant vraies pour des fonctions en escalier, on démontre qu'elles le restent en passant à la limite. Une fois démontrées pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on les montre pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ en les appliquant à $\operatorname{Re} f$ et à $\operatorname{Im} f$. $\square$

Comme pour les fonctions en escalier, les propriétés de positivité et de croissance sous-entendent que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Par ailleurs, sans l'hypothèse $a \leq b$, l'inégalité triangulaire se réécrit :

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f| \qquad \text{ou encore} \qquad \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$$

Corollaire 32.17

Soit $f,g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Si $|f| \leq M$ sur $[a,b]$, alors

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \int_a^b (|f|\cdot|g|) \leq M\int_a^b |g|$$

Exemple 11. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x e^t \sin t\, dt \leq e^x - 1$

Propriété 32.18

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*, telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Alors, $f \equiv 0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f \not\equiv 0$. Alors, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme $f \geq 0$, on peut poser $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]\cap[x_0-\eta, x_0+\eta]$, on a $f(x) \geq \varepsilon$. Alors, on a $f \geq g$ avec

$$g : t \mapsto \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } t \in [a,b]\cap[x_0-\eta,x_0+\eta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors,

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g = \lambda \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

avec $\lambda > 0$ la longueur du segment $[a,b]\cap[x_0-\eta,x_0+\eta]$. $\square$

Ce théorème est faux si f est seulement continue par morceaux. Par exemple, la fonction f définie par $f(0)=1$ et pour tout $x \neq 0$ par $f(x)=0$ a une intégrale nulle sur $[-1,1]$ mais n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$.

2.2 Encadrement ou limite d'intégrale

Méthode (Trouver un encadrement avec une intégrale)

Il arrive qu'on ne souhaite pas calculer une intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ mais simplement encadrer sa valeur. Dans ce cas, on peut trouver des fonctions "faciles à intégrer" g et h telles que

$$\forall t \in [a,b] \qquad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$$

et alors par intégration selon t entre a et b, on a : $\int_a^b g(t)dt \leq I \leq \int_a^b h(t)dt$.

Méthode (Trouver une limite avec une intégrale)

Certaines intégrales peuvent dépendre d'un paramètre, typiquement

$$I = I(n) = \int_a^b f(t,n)dt \qquad \text{ou} \qquad I = I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

et on peut chercher la limite ℓ de I quand le paramètre tend vers une valeur donnée (par exemple $n \to +\infty$ ou $x \to x_0$). Plusieurs méthodes existent :

- On peut parfois conjecturer la limite ℓ en étudiant attentivement I. Il est par exemple fréquent que la limite de l'intégrale soit aussi l'intégrale de la limite (mais ce n'est pas un théorème !) :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} I(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t,n)dt \overset{(\text{NJ})}{=} \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f(t,n)dt$$

  - Si ℓ est finie, on peut majorer $|I-\ell|$ par un terme qui tend vers 0.
  - Si $\ell = \pm\infty$, on peut minorer / majorer I par un terme qui tend vers $\pm\infty$.

- Enfin, on peut comme à la méthode précédente encadrer $f(t,n)$ ou $f(t)$ par des fonctions simples, qui, après intégration selon t, tendent vers la même limite ℓ quand le paramètre tend vers la valeur donnée.

Exemple 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I(n) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+n} dt$. Déterminer la limite de $I(n)$ quand $n \to +\infty$.

Exemple 13. Pour tout $x > 1$, on pose $I(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Déterminer la limite de $I(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

2.3 Théorème fondamental de l'analyse

On rappelle ici des résultats vus au chapitre 6 pour des fonctions continues ou de classe C^1. Ils ne se généralisent *pas* aux fonctions continues par morceaux, l'hypothèse de continuité de la fonction (ou de sa dérivée) est essentielle :

Théorème 32.19 (Théorème Fondamental de l'Analyse)

Soit I un intervalle, $f \in C^0(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$. L'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Montrons que $\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0+h \in I$ (ainsi F est bien définie en x_0+h). Alors :

$$\begin{aligned} F(x_0+h)-F(x_0)-hf(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - hf(x_0) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\, dt \end{aligned}$$

Or, comme f est continue en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[\qquad |f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $|h| \leq \eta$, on a donc

$$\begin{aligned}
|F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \right| \\
&= \varepsilon |h|
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|h| \leq \eta$ avec $h \neq 0$, on a

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)}{h} \right| \leq \varepsilon$$

Cela signifie que

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

ou encore que

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$$

d'où le résultat. □

Corollaire 32.20 (TFA généralisé)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, J un intervalle et $\alpha, \beta : J \to I$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (sur J). Alors la fonction

$$\begin{aligned}
\varphi : J &\to \mathbb{K} \\
x &\mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt
\end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ (sur J) et

$$\forall x \in J \qquad \varphi'(x) = \beta'(x) f(\beta(x)) - \alpha'(x) f(\alpha(x))$$

Exemple 14. Montrer que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{4-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2[$ et calculer sa dérivée.

Rappelons enfin quelques propriétés vues au premier chapitre d'intégration :

- Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $\quad F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$
- Intégration par parties : soit $u,v\in C^1([a,b],\mathbb{K})$. Alors $\quad \int_a^b u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)dt$
- Changement de variable. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$ et $\varphi\in\mathcal{C}^1([a,b],I)$. Alors

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

2.4 Parité, périodicité, valeur moyenne

Le résultat qui suit a été vu pour des fonctions continues. On peut l'étendre aux fonctions continues par morceaux :

Propriété 32.21

Soit $a>0$ et f une fonction.

- Si $f\in\mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$ est paire, alors $\int_{-a}^a f=2\int_0^a f$.
- Si $f\in\mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$ est impaire, alors $\int_{-a}^a f=0$.
- Si $f\in\mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est T-périodique, alors pour tout $b\in\mathbb{R}$, on a $\int_b^{b+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt$.

Définition 32.22 (Valeur moyenne)

Soit $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On appelle valeur moyenne de f le scalaire

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \quad \in\mathbb{K}$$

La valeur $\quad \alpha=\frac{1}{b-a}\int_a^b f \quad$ est l'unique scalaire qui vérifie $\quad \int_a^b f=\int_a^b \alpha$.

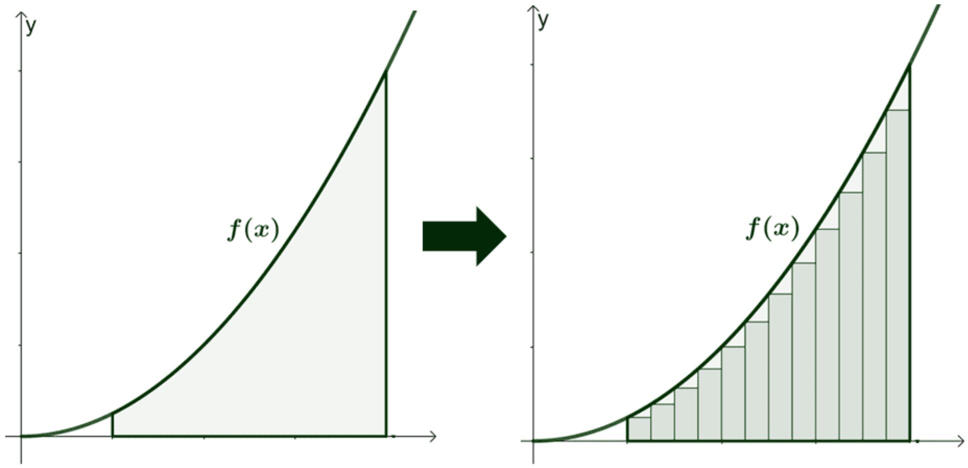
3 Sommes de Riemann – premiers pas vers le calcul numérique de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On cherche à calculer numériquement (par Python ou autre) la valeur de $\int_a^b f$. Si on connait une primitive F de f sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f=F(b)-F(a)$. Mais Python ne pourra pas deviner une primitive pour n'importe quelle fonction f ! On présente ici une méthode pour construire numériquement une suite qui converge vers l'intégrale.

Pour cela, on considère la subdivision régulière de $[a,b]$ qui partage cet intervalles en n intervalles de même longeur : $\sigma=(x_i)_{0\le i\le n}$ avec

$$\forall i\in[\![0,n]\!] \qquad x_i=a+i\,\frac{b-a}{n}$$

Le principe est d'approcher l'aire sous la courbe de $\mathcal{C}_f$ par une succession de n rectangles, un pour chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$:



Il y a en tout n rectangles

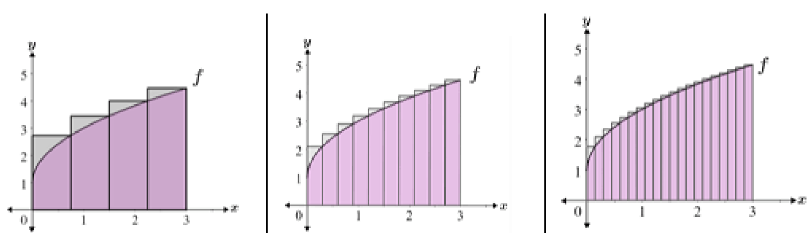
- La largeur de chaque rectangle vaut ....
- En revanche, la hauteur est variable : le rectangle ayant pour largeur $[x_i, x_{i+1}]$ a pour hauteur ....

Ainsi, l'aire totale obtenue par les rectangles vaut :

$$S_n \quad =$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de Riemann associée à f. Elle est obtenue par la méthode des rectangles à gauche. On comprend intuitivement que, lorsque n tend vers $+\infty$, la somme de Riemann (S_n) tend vers la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$.

À noter : on peut aussi définir une somme de Riemann associée à f par la méthode des rectangles à droite : cette fois la hauteur du rectangle ayant pour base $[x_i, x_{i+1}]$ est choisie comme étant $f(x_{i+1})$. Si on note S'_n l'aire totale de ces rectangles, on a là encore $S'_n \to \displaystyle\int_a^b f$:



Enfin, cela fonctionne si f est continue, mais aussi lorsque f est continue par morceaux :

Théorème 32.23

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f \qquad \text{avec } S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f \qquad \text{avec } S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

Exemple 15. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

4 Formules de Taylor globales

4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 32.24 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $a \in I$, $p \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{p+1}(I, \mathbb{K})$. Alors :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$$

Remarque. Le terme $\sum\limits_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ correspond exactement à la partie régulière du DL à l'ordre p de f en a. Ainsi, pour écrire la formule de Taylor avec reste intégral, il suffit de tronquer le DL à un ordre p et d'écrire, au lieu du $o(\cdots)$, le reste intégral ci-dessus.

Remarque. Cette formule est valable pour tout point $x \in I$: elle a donc une validité "globale". Ce n'est pas le cas de la formule de Taylor-Young, valide avec seulement $f \in C^p(I, \mathbb{K})$ et qui s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^p)$$

Cette formule a une validité "locale" : elle ne fait que donner une information sur une limite quand x tend vers a, à savoir :

$$\frac{1}{(x-a)^p}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- Si $p=0$, pour toute fonction $f \in C^1(I,\mathbb{K})$, on a (conséquence du TFA) :

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$$

  Ainsi, la propriété est vraie pour $p=0$.

- Supposons la propriété vraie pour un $p \in \mathbb{N}$. Montrons-la pour le rang $p+1$. Soit $f \in C^{p+2}(I,\mathbb{K})$. Alors a fortiori $f \in C^{p+1}(I,\mathbb{K})$, si bien que par l'hypothèse de récurrence :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt$$

  Appliquons une intégration par parties à la dernière intégrale :

$$\begin{cases} u'(t)=\dfrac{(x-t)^p}{p!} & v(t)=f^{(p+1)}(t) \\ u(t)=-\dfrac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} & v'(t)=f^{(p+2)}(t) \end{cases}$$

  Alors

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt &= [u(t)v(t)]_a^x-\int_a^x u(t)v'(t)dt \\ &= 0-u(a)v(a)-\int_a^x \frac{-(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)dt \qquad \text{car } u(x)=0 \\ &= \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)dt \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)dt$$

  On a donc montré la propriété au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout rang $p \in \mathbb{N}$. $\square$

4.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est importante, mais la plupart des exercices nécessitent plutôt l'inégalité qui suit :

Théorème 32.25 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $a \in I$, $p \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{p+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t \in I} \left| f^{(p+1)}(t) \right| \leq M$$

Alors,

$$\forall x \in I \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Remarque. Si $p = 0$, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange se réécrit ainsi : pour tout $M \geq \sup_{t \in I} |f(t)|$, on a

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - f(a)| \leq M \times |x-a|$$

ce qui est une réécriture de l'inégalité des accroissements finis.

Démonstration. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f. On ne traite que le cas $x \geq a$:

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \int_a^x \left| \frac{(x-t)^p}{p!} \right| \times \left| f^{(p+1)}(t) \right| dt \qquad \text{car } x \geq a \\
&\leq \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \times M \, dt \qquad \text{car } x-t \geq x-a \geq 0 \\
&= \frac{M}{p!} \int_a^x (x-t)^p dt \\
&= \frac{M}{p!} \left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)} \right]_a^x \\
&= \frac{M}{(p+1)!} \times (x-a)^{p+1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 16. Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{x^5}{5!}$

5 Compléments

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle que f est continue sur I si :

$$\forall x \in I \quad \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in I \qquad (|x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon)}_{f \text{ est continue en } x}$$

Dans cette définition, le δ à trouver dépend a priori de x et de ε.

Remarque (*Intuition géométrique de la continuité en x de f*)**.** On considère le point $(x, f(x))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$. Puis on va tracer un cadre rectangulaire de centre $(x, f(x))$. Ce cadre est dit “correct” si la courbe $\mathcal{C}_f$ est toute entière contenue dans ce cadre et si la courbe “sort du cadre” par les côtés de ce cadre. Sinon, il est dit “incorrect”.

Si on note ε la demi-hauteur et δ la demi-largeur du cadre, dire que le cadre est correct signifie :

$$\begin{aligned} & \forall y \in I \qquad x-\delta \leq y \leq x+\delta \implies f(x)-\varepsilon \leq f(y) \leq f(x)+\varepsilon \\ \iff & \forall y \in I \qquad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

f est continue en x si, quelle que soit la demi-hauteur $\varepsilon > 0$ qu'on choisit, il va exister une demi-largeur $\delta > 0$ (qui peut donc dépendre de x et de ε) **qui rend le cadre correct.**

Définition 32.26 (Continuité uniforme)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I \qquad (|x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon)$$

Avec cette écriture, le δ dépend toujours de ε mais ne dépend plus ni de x, ni de y. Par exemple si $\varepsilon = 1$, cela signifie qu'il existe $\delta > 0$, qui est le même pour tous les points x, y, tels que

$$y \in [x-\delta, x+\delta] \quad \implies \quad |f(x)-f(y)| \leq 1$$

Intuitivement, l'uniforme continuité signifie que la distance $|f(y)-f(x)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut tant que $|y-x|$ sera plus petit qu'une valeur δ fixée qui est la même pour tous les points x, y.

Remarque (*Intuition géométrique de la continuité uniforme de f sur I*)**.** Là encore, on va tracer un cadre de demi-hauteur ε et de demi-largeur δ. Cependant, ce cadre sera mobile : le centre de ce cadre va parcourir tous les points $(x, f(x))$.

f est uniformémnet continue sur I si, quelle que soit la demi-hauteur $\varepsilon > 0$ qu'on choisit, il va exister une demi-largeur $\delta > 0$ (qui peut donc dépendre de ε mais pas de x) **qui rend le cadre correct.**

On pourra également consulter l'animation sur la page anglophone de wikipédia : https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_continuity. Attention, les cadres sont dessinés pour des valeurs de ε et de δ fixées.

Exemple 17. Est-ce que $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$? (On tracera d'abord un dessin pour s'en convaincre puis on en donnera une preuve rigoureuse).

Propriété 32.27

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors on a les implications suivantes

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue}$$

Démonstration. La deuxième implication est claire : si f est uniformément continue sur I, alors on peut trouver pour chaque $\varepsilon > 0$ un réel $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que la suite de l'assertion soit vérifiée. On transforme alors le quantificateur "$\forall x, y \in I$" en "$\forall x \in I \quad \forall y \in I$" puis on peut déplacer la quantificateur "$\forall x \in I$" au début de l'assertion. Ce faisant, le δ est alors autorisé à dépendre de x, mais on sait déjà qu'on peut le fixer indépendamment de x avec le choix $\delta(\varepsilon)$ sus-mentionné. On trouve ainsi que f est continue sur I.

Montrons la première implication. Supposons que f est K-lipchitzienne avec $K > 0$. Alors pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$. Alors, pour tous $x, y \in I$

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq K\delta = \varepsilon$$

donc f est uniformément continue. □

Théorème 32.28 (Théorème de Heine)

Si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Exemple 18. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ car f est continue sur $[0, 1]$.

Preuve du théorème qui donne l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Rappelons ce théorème :

Théorème 32.29 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

- Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour toute telle suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n$$

Cette limite ne dépend pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie.

Démonstration. On utilise le lemme d'approximation (Lemme 32.12) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on pose $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$, il existe une fonction $g_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

On dispose donc d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\alpha_n := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Montrons que $\left(\int_a^b g_n\right)$ est bornée. Par inégalité triangulaire (intégrale), on a :

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |g_n(x)|\, dx$$

Il faut donc majorer la fonction $|g_n|$. Comme $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, la fonction f est bornée par une constante $M \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &= |g_n(x) - f(x) + f(x)| \\
&\leq |g_n(x) - f(x)| + |f(x)| \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \\
&\leq \alpha_n + M
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |g_n(x)|\,dx \leq \int_a^b (\alpha_n + M)\,dx = (\alpha_n + M) \times (b-a)$$

Or, la suite (α_n) est convergente, donc bornée par un certain $K \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $(K+M)(b-a)$.

- Montrons à présent que la suite $\left(\int_a^b g_n\right)$ converge. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, comme la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe donc une extractrice φ et un réel ℓ tels que

$$\int_a^b g_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

On va montrer qu'en fait la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ toute entière (et pas juste sa sous-suite) converge vers ℓ. Pour cela montrons que $\left|\int_a^b g_n - \ell\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \ell\right| &= \left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)} + \int_a^b g_{\varphi(n)} - \ell\right| \\
&\leq \left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| + \underbrace{\left|\int_a^b g_{\varphi(n)} - \ell\right|}_{\to 0} \qquad \text{car } \int_a^b g_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| &\leq \int_a^b \left|g_n(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \qquad \text{par inégalité triangulaire intégrale} \\
&= \int_a^b \left|g_n(t) - f(t) + f(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \\
&\leq \int_a^b |g_n(t) - f(t)|\,dt + \int_a^b \left|f(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \qquad \text{par in. tri. dans } \mathbb{R} \\
&\leq \int_a^b \alpha_n + \int_a^b \alpha_{\varphi(n)} \qquad \text{car } \begin{cases} \sup\limits_{t\in[a,b]} |g_n(t) - f(t)| \leq \alpha_n \\ \sup\limits_{t\in[a,b]} \left|g_{\varphi(n)}(t) - f(t)\right| \leq \alpha_{\varphi(n)} \end{cases} \\
&= \left(\alpha_n + \alpha_{\varphi(n)}\right)(b-a)
\end{aligned}$$

Or, $\alpha_n \to 0$ et par suite, $\alpha_{\varphi(n)} \to 0$. Donc $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement, on a bien montré que $\int_a^b g_n \to \ell$.

- Enfin, il faut montrer que la limite ℓ trouvée ne dépend pas de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite telle que

$$\beta_n := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-h_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On montre alors de même qu'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^b h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Montrons que $\ell = \ell'$. Pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| &= \left|\int_a^b (g_n - h_n)\right| \\
&\leq \int_a^b |g_n - h_n| \\
&= \int_a^b |g_n - f + f - h_n| \\
&\leq \int_a^b |g_n - f| + \int_a^b |f - h_n| \\
&\leq \int_a^b \alpha_n + \int_a^b \beta_n \\
&= \alpha_n(b-a) + \beta_n(b-a) \to 0 \qquad \text{car } \alpha_n \to 0 \quad \text{et} \quad \beta_n \to 0
\end{aligned}$$

Et donc $\left|\displaystyle\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, on a également $\left|\displaystyle\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell - \ell'|$ par opérations sur les limites. D'où par unicité de la limite $|\ell - \ell'| = 0$, i.e. $\ell = \ell'$.

$\square$